08/10/2019

Εισαγωγή / Κίνητρα (συνέχεια)

Τι κάνουμε στον Α.Λ. ΙΙΙ (και IV); Εξετάζουμε συναρτήσεις περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών (εξαρτημένων ή/και ανεξάρτητων), δηλ.

(a) $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$: (πραγμ. συνάρτ. ~~n~~ ανεξ. πραγμ. μεταβλητών) ($n \geq 2$)

Παράδειγμα: η θερμοκρασία $T(x,y,z) \in \mathbb{R}$ σε κάθε σημείο $(x,y,z) \in U =$ Αιθ. $3 \subset \mathbb{R}^3$

(b) $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

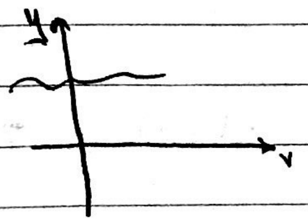
Αν $n = m$ η διανυσματική συνάρτηση $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ονομάζεται διανυσματικό πεδίο.

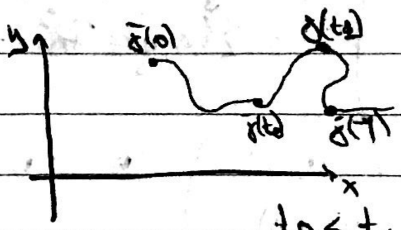
Παράδειγμα: $\bar{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ η ταχύτητα του αέρα σε κάθε σημείο $(x,y,z) \in U$

$U =$ Αιθ. $3 \subset \mathbb{R}^3$.

(c) $\bar{\gamma} : \underset{[a,b]}{I} \to \mathbb{R}^n$ $I \subset \mathbb{R}$ (Αν είναι «συνεχής», τότε ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$)

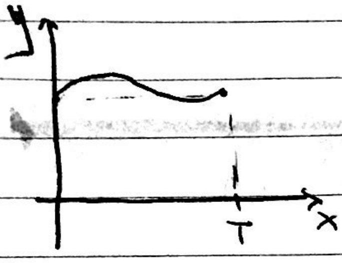
$\boxed{n=2}$





Είναι μια παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Πχ αν $f: [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής



$$\bar{\gamma}(x) = (x, f(x)), \quad x \in [0,T]$$
$$\bar{\gamma}(t) := (t, f(t)), \quad t \in [0,T]$$

Η εικόνα της $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, δηλ. $\bar{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Ειδική περίπτωση διανυσματικής συνάρτησης είναι ένα τμήμα παραμετρικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$.
$$\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

Παράδειγμα: $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}$ μοναδιαία (κέντρου $(0,0,0)$) σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x^2+y^2) \to x^2+y^2 \leq 1.$$
$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

Άρα το άνω ημισφαίριο (όπου $z \geq 0$) δίνεται από τη συνάρτηση
$$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \in \mathbb{R}$$
$\underbrace{(x,y) \in \bar{B}((0,0),1)}$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1.$$
$$\Rightarrow \bar{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \bar{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\left(\Leftrightarrow \bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \text{ με } x(u,v)=u,\ y(u,v)=v,\ z(u,v)=f(u,v) \right)$$

Αυτή είναι η παραμετρική επιφάνεια του άνω ημισφαιρίου.
Το άνω ημισφαίριο είναι η εικόνα της $\bar{\Phi}$. $\bar{\Phi}(\bar{B}((0,0),1)) \subset \mathbb{R}^3$

το οποίο ταυτίζεται με το γράφημα της f.
$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \bar{B}((0,0),1)\}$

[Παρατηρούμε, ότι, για την παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης χρειαζόμαστε (και αρκεί) μια πραγματική μεταβλητή, ενώ για την παραμ/ποίηση μιας επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$, χρειαζόμ. (και αρκούν) δύο πραγμ. μεταβλητές → καμπύλη είναι κάτι «μονοδιάστατο» επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ κάτι «διδιάστατο» ($\Rightarrow S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$)

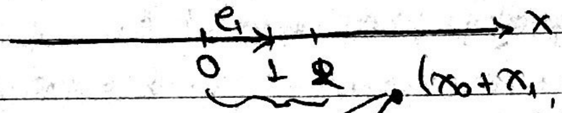
$\boxed{\text{SOS}}$ Συνοψίζοντας: Ο Α.Λ ΙΙΙ προαπαιτούμενα
(α) είναι εισαγωγή για Α.Λ. IV, Διαφορ. Γεωμ., Κλασ. Μηχ., Μιγαδ. Συναρτήσεις
(β) απαιτεί ενδιαφέρον Αναλ. Γεωμ., Γραμ. Αλγ. Ι, ΙΙ, Α.Λ Ι, ΙΙ
(γ) εξετάζω τις αναλυτικές ιδιότητες (όρια, συνέχεια, διαφορισιμότητα) συναρτ. $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \in \mathbb{R}^n$
(δ) για $n=m=1$ έχουμε τις γνωστές συναρτήσεις
(ε) μας ενδιαφέρει η μεταβολή αυτών των συναρτήσεων
(στ) πώς διαβάζουμε: (α) παρακολουθούμε
(β) διαβάζουμε τις σημειώσεις μας (καταλαβαίνουμε τα παραδείγματα
(γ) κοιτάμε τη λένε οι σημειώσεις « Διανυσματική Ανάλυση και λύνουμε αντίστοιχες ασκήσεις
Προσοχή: δεν είναι όλη η ύλη των σημ. Α.Λ εξεταστέα ύλη]

(δ') Συγγράμματα:
• Marsden, Tromba,
Διανυσματικός Λογισμός
(και για Α.Λ. IV)
(• W. Rudin, Αρχές Μαθηματικής Ανάλυσης)

Κεφάλαιο 2: «Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$»

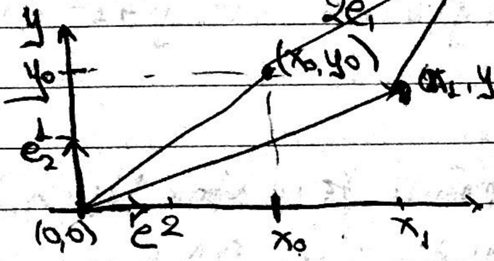
Για να μπορούμε να μιλάμε για συγκεκριμένα σημεία του χώρου ($\mathbb{R}^n$) πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων και μια μονάδα απόστασης.

$\boxed{n=1}$



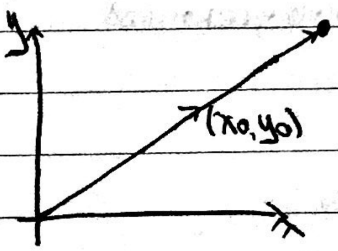
$(x_0+x_1, y_0+y_1) = x_0\underbrace{(1,0)}_{=\bar{e}_1} + y_0\underbrace{(0,1)}_{=\bar{e}_2} + x_1(1,0) + y_1(0,1)$

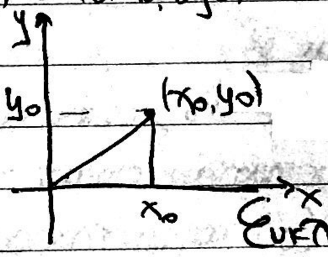
$\boxed{n=2}$



$(x_1, y_0) = x_1(1,0) + y_0(0,1)$

$(x_0+x_0, y_0+y_0) = (2x_0, 2y_0) =: 2(x_0,y_0)$





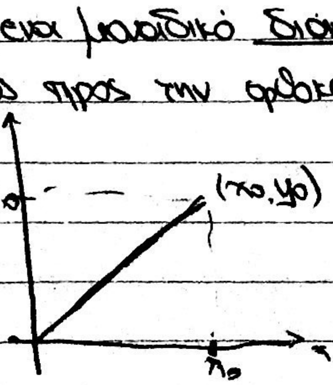
$\|(x_0,y_0)-(0,0)\| = \|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$

Ευκλείδεια νόρμα του $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ = απόσταση του σημείου (x,y) από το $(0,0)$.

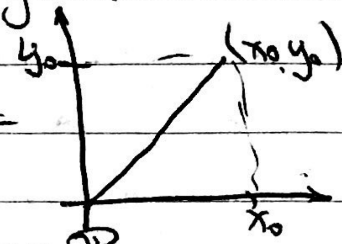
$\boxed{\text{ΣΟΣ}}$ Το απόσταγμα των προηγούμενων διαισθητικών θεωρήσεων, οδηγεί στην ακόλουθη γεωμετρική-αλγεβρική δομή του χώρου $\mathbb{R}^n$

(1) Κάθε «σημείο» του $\mathbb{R}^n$ (γεωμετρικά, για $n=1,2,3$) αντιστοιχεί/ταυτίζεται σε 1-1 με ένα μοναδικό διάνυσμα $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_i\in\mathbb{R}$ (ως προς την ορθοκανονική βάση $\bar{e}_1=(1,0,\dots,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0,\dots,0)$ κλπ

n=2



(2) Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και του βαθμωτού πολ/σμού $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, οι οποίες ορίζονται



κατά σημείο ως εξής: $\bar{x}+\bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) :=$
$(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

και γίνεται ένας διαν. χώρος (διάστασης n) πάνω από το $\mathbb{R}$.

[Άσκηση: Ελέγξτε ότι με αυτές τις πράξεις (και γνωρίζοντας τις ιδιότητες των πράξεων στο $\mathbb{R}$) ο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι πράγματι διαν. χώρος.]

(3) Εισάγαμε στον διαν. χώρο $\mathbb{R}^n$ το εσωτερικό γινόμενο

$\bar{x}\cdot\bar{y} = (x_1, \dots, x_n)\cdot(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ (για τη γεωμετρική ερμηνεία βλέπε μετά)

δηλ. μια πράξη (απεικόνιση) $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες συμμετρία $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$, γραμμικότητα (ως προς το πρώτο όρισμα) $(a\bar{x}+b\bar{y})\cdot\bar{z} = a(\bar{x}\cdot\bar{z}) + b(\bar{y}\cdot\bar{z})$ $(a, b \in \mathbb{R})$
και το «θετικά ορισμένο» $\begin{cases} \bar{x}\cdot\bar{x} \geq 0, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{και } \bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0} = (0, \dots, 0) \end{cases}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

(4) Για το εσωτερικό γινόμενο (*) επάγει την Ευκλείδια νόρμα
$\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (**)
η οποία είναι μια νόρμα (ενός διαν. χώρου) δηλ. μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες
μη αρνητικότητα $\|\bar{x}\| \geq 0 \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, απόλυτη ομογένεια
$\|a\bar{x}\| = a\|\bar{x}\|$

[Άσκηση: Ελέγξτε ότι αυτά ισχύουν για το εσωτ. γινόμενο (*)]

Super SOS: και την τριγωνική ανισότητα
$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

[Άσκηση: Ελέγξτε ότι η Ευκλ. νόρμα (**) έχει τις δύο πρώτες ιδιότητες]
Για να δείξουμε την τριγ. ανισότητα χρειαζόμαστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq ||\bar{x}||\cdot||\bar{y}||$ Super-SOS

[Άσκηση: Δείτε την αποδ. στις σημ. Δ.Α. και αποδείξτε με αυτήν την τριγ. ανισότ.]

(5) Η Συνεπ. (**) ορίζ. μια απόσταση (ή μετρική) δηλ. μια απεικόνιση $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d(\bar{x},\bar{y}) := ||\bar{x}-\bar{y}||$, $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ η οποία έχει τις ιδιότητες συμμ. $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$, $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ και $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$, τριγ. ανισότητα $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

[Με το (4) ο $\mathbb{R}^n$ γίνεται χώρος με νόρμα, με το (5) γίνεται μετρικός χώρος].

[Άσκηση: Κοιτάξτε σημ. Δ.Α. στην άσκηση 6]

Παρατήρηση: Η τριγ. ανισότητα της μετρικής μας λέει $||\bar{x}-\bar{y}|| \leq ||\bar{x}-\bar{z}|| + ||\bar{z}-\bar{y}||$

Άσκηση: Ερώτηση: Γιατί ισχύει αυτό; Τι σημαίνει γεωμετρικά στον $\mathbb{R}^2$;

Scanned with CamScanner